1 Quadratische Ergänzung

1.1 Motivation

Aus der Scheitelpunktsform $y = f(x) = a(x + x_S)^2 + y_S$ einer quadratischer Gleichungen können die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_S|y_S)$ direkt abgelesen werden. Doch häufigt liegt eine quadratische Funktion $y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ nur in der allgemeinen Form vor und kann nicht einfach, z.B. mittels Binomischer Formeln, in die Scheitelpunktsform umgewandelt werden. Mittels einer QUADRATISCHEN ERGÄNZUNG ist das möglich.

1.2 Beispiel

Die Funktionsgleichung $y = -0,5x^2 + 2x - 1$ soll mittels QUADRATISCHER ERGÄNZUNG in die Scheitelpunktsform überführt werden.

$$y = -0,5x^2 + 2x - 1$$

1. Schritt: Ausklammern von $-0,5$ mittels Division $\frac{-0,5}{-0,5} = 1$, $\frac{2}{-0,5} = -4$ und $\frac{-1}{-0,5} = 2$ ergibt

$$y = -0,5(x^2 - 4x + 2)$$

Der Ausdruck $x^2 - 4x + 2$ in der Klammer kann nicht mittels einer Binomischen Formel in eine der Formen $(x + z)^2$ oder $(x - z)^2$ gebracht werden. Denn für den Fall $(x - z)^2 = x^2 - 2xz + z^2$ ist $2 = z^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}$, aber $-2xz = -4x \Rightarrow z = -2$. Deshalb wird der **Trick** $0 = -z + z$, also $0 = -2 + 2$ benutzt.
2. Schritt: In der Klammer wird 0 addiert

$$y = -0,5(x^2 - 4x + 2 + 0)$$

3. Schritt: für $0 = -2 + 2$ gesetzt

$$y = -0,5(x^2 - 4x + 2 - 2 + 2)$$

4. Schritt: $+2 + 2 = 4$ (QUADRATISCHE ERGÄNZUNG)

$$y = -0,5(x^2 - 4x + 4 - 2)$$

5. Schritt: -2 wird ausgeklammert ($-2 \cdot -0,5 = +1$, ggf. Klammer ausmultiplizieren und wieder ausklammern)

$$y = -0,5(x^2 - 4x + 4) + 1$$

6. Schritt: da nach Binomischer Formel $(x^2 - 4x + 4) = (x - 2)^2$, wird umgeformt in

$$y = -0,5(x - 2)^2 + 1$$

und erhalten die Scheitelpunktsform.
Probe:

$$y = -0,5(x - 2)^2 + 1 = -0,5(x^2 - 4x + 4) + 1 = -0,5x^2 + 2x - 2 + 1 = -0,5x^2 + 2x - 1$$

ergibt die Ausgangsform.